Lời giải AMC 8 năm 2015

1. **Đáp án (A)**. Sàn nhà dài 12 : 3 = 4 thước và rộng 9 : 3 = 3 thước. Vì vậy cần thảm rộng: 4 x 3 = 12 thước2 để phủ kín sàn nhà.

Hoặc: Sàn nhà rộng 12 x 9 feet2. Mà 1 thước2 = 3 x 3 feet2. Vì vậy tấm thảm rộng: 12 x 9 : 9 = 12 thước2 để phủ kín sàn nhà.

1. **Đáp án (D)**. Hình bát giác đều có thể chia thành 8 tam giác đồng dạng, trong đó có 3 tam giác BOC, COD và DOE. Diện tích của tam giác XOB bằng một nửa các tam giác trên do đó diện tích phần tô đen là: $3.\frac{1}{8}+\frac{1}{2}.\frac{1}{8} = \frac{7}{16}$.



1. **Đáp án (D)**. Jill mất $\frac{1}{10}$ giờ (6 phút) để đi tới bể bơi, trong khi Jack mất $\frac{1}{4}$ giờ (15 phút). Do đó Jill đến sơm hơn Jack 15 – 6 = 9 phút.
2. **Đáp án (E)**. Có 2 cách xếp 2 bạn trai vào hai đầu hàng và có 3.2.1 = 6 cách để xếp 3 bạn gái ở giữa. Do vậy có tất cả 2.6 = 12 cách sắp xếp.
3. **Đáp án (A)**. Phạm vi điểm bằng hiệu của điểm cao nhất và điểm thấp nhất, do vậy phạm vi này thay đổi từ 31 lên 33. Phạm vi điểm là đại lượng thống kê duy nhất tăng ở bài toán này. Bởi vì 40 là điểm số thấp nhất nên giá trị trung bình sẽ giảm. Giá trị nằm giữa trong 11 điểm số đầu tiên này là giá trị cao thứ 6 : 58. Giá trị nằm giữa của 12 điểm số đầu là trung bình cộng của điểm số cao thứ 6 và thứ 7: (58 + 58)/2 = 58, do đó không có sự thay đổi ở giá trị nằm giữa. Tương tự, giá trị xuất hiện nhiều nhất vẫn là 58. Khoảng giữa là giá trị trung bình của điểm cao nhất và điểm thấp nhất. Do đó khoảng giữa của 11 giá trị đầu là (73 + 42)/2 = 57,5 và khoảng giữa của 12 giá trị đầu là 56,5 nên khoảng giữa đã giảm.
4. **Đáp án (B)**. Lấy D là trung điểm cạnh AC. Khi đó BD là đường trung trực cạnh AC và tam giác BDC là tam giác vuông có cạnh BC = 29, DC = 21. Vậy BD = $\sqrt{29^{2}- 21^{2}}$ = $\sqrt{400}$ = 20. Vậy diện tích tam giác ABC = $\frac{1}{2}$.20.42 = 420.

Hoặc: Công thức Heron giúp ta tính được diện tích tam giác thông qua ba cạnh. Nếu 3 cạnh tam giác là a, b, c và đặt s = $\frac{a+b+c}{2}$. Khi đó, diện tích tam giác là $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Trong bài này s = $\frac{29 + 29 +42}{2}$ = 50, nên diện tích tam giác là $\sqrt{50(50-29)(50-29)(50-21)}$ = 21$\sqrt{400}$ = 420.

1. **Đáp án (E).** Có 9 cách bốc được 2 số là:

(1,1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)

Ta thấy có 5 trường hợp có tích là số chẵn nên khả năng có thể xảy ra là $\frac{5}{9}$

Hoặc: Cách để có được tích hai số là lẻ thì ở cả hai hộp đều phải lấy ra số lẻ. Khả năng lấy ra được số lẻ là $\frac{2}{3}$.$ \frac{2}{3}$ = $\frac{4}{9}$. Vậy khả năng để tích 2 số lấy ra là một số chẵn là: 1 - $\frac{4}{9}$ = $\frac{5}{9}$.

1. **Đáp án (D)**. Đặt t là độ dài cạnh thứ 3 của tam giác. Theo bất đẳng thức tam giác t < 5 + 19 = 24. Do đó chu vi tam giác 5 + 19 + t < 5 + 19 + 24 = 48.
2. **Đáp án D.** Để ý rằng Janabel bán được 1 dụng cụ sau ngày đầu tiên, 1+3 = 22 sau ngày thứ 2, 1 + 3 + 5 = 32 sau ngày thứ 3. Theo như quy luật trên thì ngày thứ 20 sẽ bán được 202 = 400 sản phẩm.

Hoặc: Tổng của 20 số lẻ đầu tiên là: 1, 3, 5,…, 39 là đáp án cần tính. Tổng của số đầu và số cuối là 40, tổng của số đứng thứ 2 và thứ 19 là 40; thực tế có 10 cặp như vậy. Nên tổng ở đây là 400.

1. **Đáp án (B).** Vị trí hàng nghìn có thể điền được các chữ số từ 1 tới 9 (không có số 0). Để các chữ số không lặp lại, hàng trăm có thể được điền bởi 9 chữ số còn lại (bao gồm cả số 0). Lập luận tương tự, hàng chục và hàng đơn vị có thể được điền lần lượt bởi 8 và 7 chữ số. Vì vậy số các số tự nhiên trong khoảng 1000 tới 9999 có các chữ số khác nhau là: 9.9.8.7 = 4536.
2. **Đáp án (B).** Kí tự đầu tiên có thể là một kí tự bất kì trong 5 nguyên âm, kí tự thứ 2 có thể chọn 1 trong 21 phụ âm, kí tự thứ 3 có thể chọn 1 trong 20 phụ âm còn lại, và kí tự cuối cùng có thể chọn trong 10 chữ số. Vậy tổng số cách có thể chọn một biển số xe là: 5.21.20.10 = 21.000 trong khi chỉ có duy nhất cách chọn “AMC8”, do đó, khả năng để có được biển số xe trên là $\frac{1}{21.000}$.
3. **Đáp án (C).** Mỗi cạnh trong 12 cạnh của khối lập phương song song với 3 cạnh khác nên sẽ có 36 cặp cạnh song song. Tuy nhiên mỗi cặp cạnh này lại được tính hai lần nên tổng cộng chỉ có 18 cặp cạnh song song.

Hoặc: Có 6 cặp song song cùng phương với AB (AB//EF, AB//HG, AB//DC, EF//HG, EF//DC, HG//DC). Tương tự có 6 cặp song song cùng phương AE và 6 cặp song song cùng phương AD; do đó có tổng cộng 18 cặp cạnh song song.

1. **Đáp án (D).** Nếu trung bình của 9 số còn lại là 6 thì tổng của chúng sẽ là 54. Bởi vì tổng của 11 số ban đầu là 66, do đó tổng của 2 số được lấy ra là 12. Có 5 cách lấy ra đó là: {1, 11}, {2,10}, {3,9}, {4,8}, {5,7}.
2. **Đáp án (D).** Tổng của 4 số lẻ liên tiếp sẽ luôn chia hết cho 8, (2n-3) + (2n-1) + (2n+1) + (2n+3) = 8n. Trong số các phương án được đưa ra chỉ có duy nhất 100 là không chia hết cho 8. Bốn phương án còn lại đều viết được thành tổng của 4 số lẻ liên tiếp:

16 = 1 + 3 + 5 + 7

40 = 7 + 9 + 11 + 13

72 = 15 + 17 + 19 + 21

200 = 47 + 49 + 51 + 53.

1. **Đáp án (D).** Số lần bỏ phiếu của tất cả học sinh là: 149 + 119 + 29 = 297. Do đó tổng số học sinh yêu thích cả hai vấn đề là: 297 – 198 = 99.

Hoặc: Trong biểu đồ ven dưới đây, hình tròn bên trái biểu diễn 149 học sinh bỏ phiếu cho vấn đề thứ nhất, và hình tròn bên phải biểu diễn cho 119 học sinh bỏ phiếu cho vấn đề thứ hai. Đặt x là số học sinh bỏ phiếu cho cả 2 vấn đề. Vì vậy 149 – x là số học sinh bỏ phiếu vấn đề 1, 119 – x là số học sinh bỏ phiếu vấn đề 2 và 29 học sinh không tán đồng cho cả 2 vấn đề. Tổng các số học sinh trên phải là 198 học sinh do đó:

(149-x) + x + (119-x) + 29 = 198.

297 – x = 198.

x = 99.



1. **Đáp án (B).** Giả sử n học sinh lớp 6 cặp với n học sinh lớp 9. Vì vậy tổng số học sinh lớp 6 là $\frac{5}{2}n$, tổng số học sinh khối 9 là 3n; Vậy tổng học sinh khối 6 và khối 9 là: $\frac{5}{2}n$+ 3n = $\frac{11}{2}n$. Có 2n học sinh tham dự chương trình tư vấn nên sẽ chiếm $\frac{2n}{\frac{11}{2}n}$ = $\frac{4}{11}$ tổng số học sinh.
2. **Đáp án D.** Bởi vì thời gian không tắc đường sẽ bằng $\frac{12}{20}$ = $\frac{3}{5}$ thời gian khi gặp tắc đường. Vận tốc khi không tắc đường sẽ phải bằng $\frac{5}{3}$ vận tốc khi tắc đường. Do đó 18 dặm trên giờ chính là $\frac{2}{3}$ vận tốc khi không tắc đường, 18 : $\frac{2}{3}$ = 27. Trong 20 phút, bố của Jeremy đi được: $\frac{1}{3}$.27 = 9 dặm.
3. **Đáp án (B).** Số ở giữa của một dãy cấp số cộng 5 số bằng trung bình cộng của số đầu và số cuối. Trung bình cộng của 1 và 25 là 13. Trung bình cộng của 17 và 81 là 49. Vì vậy, X là trung bình cộng của 13 và 49 (31). Một cách tương tự cũng có thể tính được X = $\frac{9 +53}{2}$ = 31. Trên thực tế, X là trung bình cộng của 4 số ở góc.



1. **Đáp án (A).** Tam giác được vẽ trên hình chữ nhật 4x3 với các đỉnh là (1,1), (1,4), (5,4) và (5,1). Có 3 tam giác ở phía trong hình chữ nhật nhưng lại nằm bao ngoài tam giác ABC. Tam giác nằm góc trái bên dưới có diện tích: $\frac{1}{2}$.4.2 = 4. Diện tích tam giác góc trên bên trái: $\frac{1}{2}$.1.3 =$ \frac{3}{2}$. Tam giác còn lại cũng có diện tích $\frac{3}{2}$. Vậy diện tích tam giác ABC là: 12 – 4 – $\frac{3}{2}$ – $\frac{3}{2}$ = 5. Hình chữ nhật lớn bao ngoài có diện tích là 6x5 = 30. Do vậy tam giác ABC chiếc số phần là: $\frac{5}{30}$ = $\frac{1}{6}$.

 

1. **Đáp án (D).** Nếu Ralph mua 6 đôi tất giá 1 đô la thì 6 đôi tất còn lại phải có giá ít nhất là 19 đô la trong khi bạn ấy chỉ trả 24 đô la. Mua ít đôi tất 1 đô la hơn sẽ khiến Ralph phải trả nhiều tiền hơn. Nếu mua 8 đôi tất giá 1 đô la thì số tiền mua 4 chiếc còn lại nhiều nhất là 16 đô la. Mua nhiều đôi 1 đô la hơn sẽ khiến số tiền bỏ ra càng nhỏ hơn. Do đó Ralph đã mua 7 đôi tất giá 1 đô la, 3 đôi 3 đô la và 2 đôi tất giá 4 đô la.
2. **Đáp án (C).** Diện tích hình vuông ABJI là 18 và tam giác KJB là tam giác đều dó đó KB = JB = $\sqrt{18}$ = 3$\sqrt{2}$. Diện tích hình vuông FEHG là 32, nên BC = FE = $\sqrt{32}$= 4$\sqrt{2}$. Các góc trong của hình lục giác đều là 120$°$, nên góc $∠$KBC = 360$°$ - 60$°$ -90$°$-120$°$=90$°$. Do đó tam giác KBC là tam giác vuông. Vậy diện tích của KBC = $\frac{1}{2}$. 3$\sqrt{2}$. 4$\sqrt{2}$ = 12.
3. **Đáp án (C).** Tổng số học sinh phải đồng thời là bội của 6 và 15. Do đó, số học sinh phải chia hết cho bội chung nhỏ nhất của 6 và 15 (30). Số ước của 30 là: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 và 30. Số ước của 60 là: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Do 60 có 12 ước nên 60 là số học sinh ít nhất có thể.
4. **Đáp án (D).** Tổng các số đã cho là 35. Mà cần 5 số tự nhiên liên tiếp nên đó phải là các số: 5, 6, 7, 8 và 9. Không thể tạo tổng 5 và 7 từ tờ giấy có số 3,5. Cốc B cần có tổng là 6 nhưng đã có tờ giấy số 3 nên chắc chắn tờ giấy số 3,5 không có trong cốc này. Cốc E cần có tổng là 9, nhưng đã có tờ giấy số 2 nên cũng chắc chắn không có tờ giấy số 3,5. Do vậy tờ giấy chứa số 3,5 chỉ có thể ở cốc D.

Có thể sắp xếp như sau:

Cốc A: 2; 3.

Cốc B: 3; 3.

Cốc C: 2,5; 4,5.

Cốc D: 2; 2,5; 3,5.

Cốc E: 2; 3; 4.

1. **Đáp án (B).** Số trận đấu mà một đội phải đấu là: 3N + 4M = 76. Vì M > 4 và N > 2M nên N > 8. Vì 76 và 4M là 2 số chia hết cho 4 nên 3N cũng phải là một số chia hết cho 4; hay N chia hết cho 4. Nếu N = 12 và M = 10 thì điều kiện N > 2M không thỏa mãn. Nếu N $\geq $ 20 thì M $\leq $ 4 thì điều kiện M > 4 không thỏa mãn. Do đó, chỉ có trường hợp N = 16, M = 7. Vậy mỗi đội phải đấu 3.16 = 48 trận trong bảng của mình và phải đấu 4.7 = 28 trận với các đối thủ khác trận.
2. **Đáp án (C).** Đặt EQ = c và TQ = s là các cạnh như hình vẽ minh họa. Tam giác QUV và FEQ có các góc đồng dạng vì có hai góc $∠$FQE và $∠$QVU bằng nhau do cùng phụ góc $∠$VQU. Nên ta có tỉ số:

$\frac{QU}{UV}$ = $\frac{EF}{EQ}$

Vì vậy QU = $\frac{1}{c}$. Vì vậy: AB = 1 + c + 1/c + 1 = 5 nên c + 1/c = 3.

Do diện tích hình vuông ABCD bằng tổng diện tích của hình vuông QRST, bốn hình vuông nhỏ cạnh 1x1, bốn tam giác kích cỡ 1 x c và bốn tam giác $\frac{1}{c}$ x 1 nên ta có:

25 = s2 + 4(1 + $\frac{c}{2}$ + $\frac{1}{2c}$)

 = s2 + 4 + 2(c + $\frac{1}{c}$)

 = s2 + 4 + 2.3

Vậy diện tích hình vuông QRST = s2 = 15.

Hoặc: Hình vuông FVMP có diện tích là 9, bốn tam giác FQV, VRM, MSP và PTF mỗi tam giác có diện tích $\frac{3}{2}$. Nên diện tích STQR là: 9 + 6 = 15.